

Theorie der Supraleitung und Suprafluidität

Schmidt Philip

14. Januar 2008, Weißenburg i. Bay.

Aus klein wird groß:

DIE MAKROSKOPISCHE WELLENFUNKTION ALS GRUNDLAGE DER
THEORIE VON SUPRALEITUNG UND SUPRAFLUIDITÄT

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrodynamik von Normalmetallen	3
1.1	Maxwell-Gleichungen	3
1.2	Drude-Ohm-Gesetz	4
1.3	Skintiefe	6
2	Madelung-Gleichungen	6
2.1	Schrödinger-Gleichungen	6
2.2	Madelung-Transformation	7
2.3	Interpretation der Madelung-Gleichungen	7
3	London-BCS-Theorie	9
3.1	Die Idee hinter der Theorie	9
3.2	Erste London-Gleichung	10
3.3	Zweite London-Gleichung	11
3.4	Fluxoid-Quantisierung	11
3.5	Doll-Näbauer-Versuch	12
3.6	Neutrale System	13
3.7	Zusammenfassung	15
A	Anhang: Herleitungen	17
A.1	Elektrodynamik von Normalmetallen	17
A.1.1	Die Magnetfeld-Relaxation	17
A.2	Madelung-Gleichungen	18
A.2.1	Madelung-Transformation	18
A.2.2	Beschleunigung des Kondensats	20
A.3	London-Gleichungen	21
A.3.1	London-Abschirmwellenlänge	21

Prolog

Grundlage der Theorie von Supraleitung und suprafluiden Medien bildet seit 1935 die London-Theorie. In ihrer ursprünglichen Version wird sie aus den Maxwell-Gleichungen der klassischen Physik hergeleitet. Spätere Experimente stimmten allerdings nicht ganz mit ihr überein. Es zeigte sich nämlich, dass im Supraleiter die Elektronen ein Kondensat bilden, was nur durch Bildung von Cooper-Paaren möglich ist, die jedoch 1935 noch nicht bekannt waren.

Im folgenden möchte ich eine moderne Herleitung der London-Theorie aus der Quantenmechanik, genauer gesagt aus der Schrödinger-Gleichung, zeigen, die in so kompletter Form noch in keiner gängigen Literatur zu finden ist. Damit sollen dann auch die Aspekte der BCS-Theorie berücksichtigt und somit die London-Gleichung auf eine moderne Form gebracht werden.

1 Elektrodynamik von Normalmetallen

Als Grundlage sollen zunächst Phänomene von Normalmetallen diskutiert werden, um im späteren Verlauf der Arbeit über deren Bedeutung in Supraleitern Vorkenntnisse zu haben.

1.1 Maxwell-Gleichungen

Ausgangspunkt für diese Betrachtungen bilden die vier Maxwell-Gleichungen von der Form:

Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi n \quad (4)$$

Diese Gleichungen können wie folgt interpretiert werden:

- Durch die Quellfreiheit von Gleichung (3) lässt sich die magnetische Induktion \mathbf{B} schreiben als Rotation eines beliebigen Vektorfeldes \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5)$$

- Über das Faraday-Gesetz kann dann die elektrische Feldstärke \mathbf{E} definiert werden mit:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6)$$

- Die Divergenz von Gleichung (1) liefert

$$\frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (4), sowie einer anschließenden Multiplikation mit $\frac{c}{4\pi}$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0 \quad (7)$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung mit einer Ladungsstromdichte \mathbf{j}_e , die sich immer aus einem Produkt von Dichte n , Ladung $Q = e$ und Driftgeschwindigkeit \mathbf{v} zusammensetzt, d.h. $\mathbf{j}_e = en\mathbf{v}$.

1.2 Drude-Ohm-Gesetz

Die Stromrelaxation im Normalmetall ist von der Form:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_e} + 0 \left(\nabla^2 \right) \right] \mathbf{j}_e = en \underbrace{\frac{e\mathbf{E}}{m}}_a$$

wobei in diese die Ladung e , die Masse m , die Streurrate $\frac{1}{\tau_e}$, die sich aus den elastischen und inelastischen Stößen ergibt, sowie die Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_e = en\mathbf{v}$ eingeht. Nun wird eine harmonische zeitabhängigkeit des elektrische Feldes \mathbf{E} angenommen, d.h. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Daraus ergibt sich für die Ladungsstromdichte:

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\mathbf{j}_0^e(\mathbf{r}) - \frac{\frac{ne^2}{m}}{-i\omega + \frac{1}{\tau}} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \right) + \frac{\frac{ne^2}{m}}{-i\omega + \frac{1}{\tau}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

Für den Fall, dass die betrachtete Zeit t sehr groß gegenüber der Stoßzeit τ wird, verschwindet der abklingende Teil und lediglich der „steady state“ bleibt übrig.

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) \stackrel{\tau_e \ll t}{\approx} \underbrace{\frac{\frac{ne^2}{m}}{-i\omega + \frac{1}{\tau}}}_{\sigma(\omega)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{\approx} \underbrace{\frac{ne^2}{m}}_{\sigma(0)} \tau \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

Falls die Stoßzeit τ groß gegenüber der betrachteten Zeit t wird, d.h. wenn es zu keinen Streuungen mehr kommt, liegt der stoßlose Limes vor:

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) \stackrel{\tau_e \rightarrow \infty}{\approx} \mathbf{j}_0^e(\mathbf{r}) + \frac{ne^2}{m} \frac{1 - e^{-i\omega t}}{i\omega} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$$

Da es dann auch keine Abnahme des elektrischen Feldes gibt, läuft ω gegen 0. $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-i\omega t}}{i\omega} = t$, wie sich durch eine Taylorentwicklung nachrechnen lässt. Somit ist der Term für die Leitfähigkeit σ aus Gleichung (9) streuratenunabhängig. Die zeitliche Änderung ist somit auch zeitunabhängig:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0^e(\mathbf{r}) + \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \quad (10)$$

Auf diesem Gedanken baut die ursprüngliche Version der London-Theorie aus dem Jahre 1935 auf. Nachteilig an dieser Herleitung ist, dass die suprafluide Dichte n^s eine phänomenologische Größe ist, über die sich, genauso wenig wie über Temperaturabhängigkeiten oder Vorgänge im Supraleiter, nichts aussagen lässt.

1.3 Skintiefe

Die Magnetfeld-Relaxation hat für eine harmonische Abnahme der Induktion, d.h. $\partial \mathbf{B} / \partial t = -i\omega$, die Form:

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j}_e = -\frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) \mathbf{E}$$

[?] Durch Gleichung 2 erhält die rechte Seite einen Bezug zur Induktion \mathbf{B} :

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} i\omega \sigma(\omega) \mathbf{B} = \underbrace{\frac{4\pi n e^2}{m c^2} \frac{i\omega}{i\omega + \frac{1}{\tau_e}}}_{\delta^{-2}(\omega)} \mathbf{B} \quad (11)$$

Die Abschirmgleichung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} B_z(x) &= e^{\frac{x}{\delta}} \\ B_z(x)' &= \frac{1}{\delta} e^{\frac{x}{\delta}} \\ B_z(x)'' &= \frac{1}{\delta^2} e^{\frac{x}{\delta}} = \frac{B_z(x)}{\delta^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Daher der Ansatz in Gleichung (11). Eine weitere Unterteilung des δ in einen abnahmeunabhängigen λ_0 Term macht dahin Sinn, dass aus Sicht eines Supraleiters jeder Strom hochfrequent, d.h. $\omega \gg 1/\tau$, ist. Für diesen Fall strebt die Skintiefe δ gegen eine feste Größe, die Londonsche-Eindringtiefe λ_0 :

$$\delta = \lambda_0 \sqrt{\frac{i\omega}{i\omega + \frac{1}{\tau_e}}} \quad \text{mit} \quad \lambda_0^2 = \frac{m c^2}{4\pi n e^2} \quad (13)$$

2 Madelung-Gleichungen

2.1 Schrödinger-Gleichungen

Die 1926 von Erwin Schrödinger entdeckte und nach ihm benannte Gleichung, beschreibt die Dynamik einer Wellenfunktion. Sie selbst ist, ähnlich wie die Newtonschen Gesetze, ein Axiom der Physik und kann daher nicht bewiesen werden.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \right] \Psi \quad (14)$$

Dies [1] ist die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen der Masse m und der Ladung e , dass sich in Gegenwart der elektromagnetischen Potentiale Φ und \mathbf{A} befindet, von denen sie hauptsächlich abhängt. Sie ist ferner eine Differentialfunktion einer Wellenfunktion Ψ , die von den Ortskoordinaten x, y, z , sowie der Zeit t abhängt.

2.2 Madelung-Transformation

Die Schrödinger-Gleichung kann an sich selbst schlecht interpretiert werden, außer dass $\Psi\Psi^*$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung a eines Teilchens angibt, so die Kopenhagener Deutung. Nach ihrer Entdeckung versuchte noch im selben Jahr Erwin Madelung durch Umschreiben des komplexen Ψ durch zwei reelle Faktoren a und φ , sowie der anschließenden Trennung von Real- und Imaginärteil, auf zwei interpretierbare Gleichungen zu stoßen. Diese Madelung-Transformation soll nun vollzogen werden:

$$\Psi \equiv ae^{i\varphi} \quad (15)$$

Die Resultate haben die Form für den

Realteil, die erste Madelung-Gleichung:

$$\hbar\dot{\varphi} + \frac{(\hbar\nabla\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi = \frac{\hbar^2\nabla^2 a}{2ma^2} \quad (16)$$

Imaginärteil, die zweite Madelung-Gleichung:

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{a^2}{m} \left(\hbar\nabla\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right] = 0 \quad (17)$$

2.3 Interpretation der Madelung-Gleichungen

Diese Gleichungen werden nun interpretierbar, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zur Wahrscheinlichkeitsdichte n_p wird:

$$\Psi\Psi^* \equiv a^2 \equiv n_p \Rightarrow$$

Zweite Madelung-Gleichung:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left[\frac{n_p}{m} \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]}_{\mathbf{j}_p = n_p \mathbf{v}_p} = 0 \quad (18)$$

Da die zeitliche Änderung einer Dichte mit einem Gradienten zusammen 0 ergibt ist dies eine Kontinuitätsgleichung mit dem Gradienten eines Flußes j_p . Die Kontinuitätsgleichung ist bereits aus 1.1 bekannt, daher lässt sich folgern:

$$\mathbf{v}_p = \frac{\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A}}{m} \quad (19)$$

Erste Madelung-Gleichung: unter Berücksichtigung von Gleichung 19, sowie des quasiklassischen Limes, d.h. $\hbar^2 \rightarrow 0$, erhält man eine Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Feldtheorie mit dem Wirkungsfeld $S = \hbar \varphi$:

$$\hbar \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_p^2 + e \Phi = 0 \quad (20)$$

Es stellt sich heraus, dass in der Quantenmechanik Wahrscheinlichkeitsströme fließen, die sogar beschreibbar sind. Nach Newton gilt für eine Beschleunigung $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{F} / m$, daher sollte die zeitliche Ableitung die beteiligten Kräfte verraten. Für die Ableitung des Phasenfaktors wird die erste Madelung-Gleichung verwendet. Des weiteren benötigt man aus der Vektoranalysis eine Identität, dass $\nabla \mathbf{v} / 2 = \dots$. Das Resultat lautet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p \equiv \frac{d \mathbf{v}_p}{dt} = \frac{e}{m} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_p}{c} \times \mathbf{B} \right] \quad (21)$$

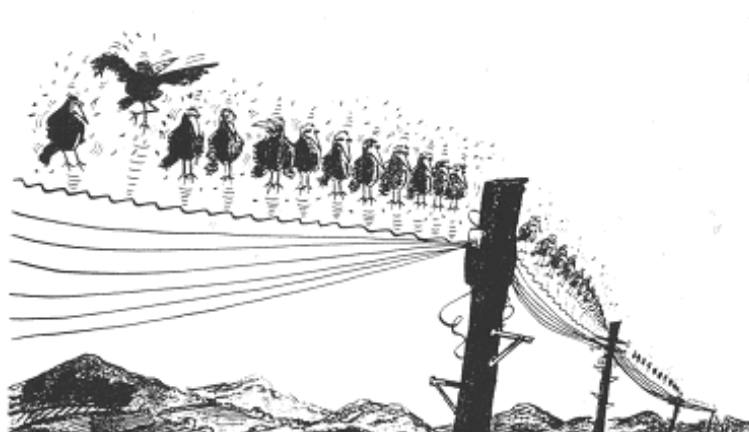
Die linke Gleichungsseite ist äquivalent zur Euler-Gleichung der Hydrodynamik, die somit die Beschleunigung in einer Flüssigkeit beschreibt. Diese wird nur durch die elektrische Kraft $e \mathbf{E}$ und die Lorentz-Kraft $(e \mathbf{v}_p / c) \times \mathbf{B}$ beeinflusst, eine Reibungskraft tritt nicht auf! Die Madelung-Flüssigkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung, verhält sich wie eine ideale Flüssigkeit ohne jegliche Reibung.

3 London-BCS-Theorie

3.1 Die Idee hinter der Theorie

Die Eigenschaften eines Supraleiters zeigen, dass das elektronische System in ihm dem eines sog. Bose-Einstein-Kondensats sehr ähnlich ist. Problematisch ist allerdings, dass es sich bei den Elektronen durch ihren halbzahligen Spin um Fermionen handelt, die somit kein Bose-Kondensat bilden können. Jedoch gibt es die Möglichkeit der Cooper-Paarbildung von Elektronen mit antiparallelen Spin und Impuls. Durch den Spin 0 gilt für sie das Pauli-Prinzip nicht mehr, es kommt zur Pseudo-Bosonen-Kondensation. Dies ist allerdings erst seit der BCS-Theorie aus dem Jahre 1957 bekannt, daher berücksichtigt die ursprüngliche London-Theorie diese Erkenntnisse nicht.

In einem solchen Kondensat besetzt eine makroskopische Anzahl an Elektronenpaaren den niedrigsten Energiezustand, d.h. auch dass sie alle die selben Eigenschaften besitzen. Dieses entartete System muss quantenmechanisch betrachtet werden, allerdings muss nicht mehr für jedes einzelne Elektron eine Wellenfunktion aufgestellt werden, sondern es genügt eine einzige, die im vorherigen Kapitel bereits diskutiert wurde.



"That's all we need, a bloody fitness fanatic."

Abb. 3.1:

Zur makroskopischen Wellenfunktion

Daher werden die Wahrscheinlichkeitsgrößen durch echte, makroskopische

„supra“-Größen ersetzt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass es sich je nach System um Bosonen oder Cooper-Paare handelt. Man muss daher einen Faktor k einführen, der für Bosonen als 1, für Fermionen-Paare als 2 definiert ist. Der Zusammenhang der Größen mit diesem Faktor ergibt sich wie folgt:

$$e \rightarrow ke = Q; \quad m \rightarrow km = M; \quad n_p \rightarrow \frac{n^s}{k} = N^s; \quad \mathbf{v}_p \rightarrow \mathbf{v}^s; \quad \mathbf{j}_p \rightarrow \frac{\mathbf{j}^s}{k} = \mathbf{J}^s; \quad \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{k}$$

Wobei der Phasenfaktor φ dafür sorgt, dass sich k aus vielen Gleichungen herauskürzt, wie z.B. bei der Geschwindigkeit \mathbf{v}^s :

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar \nabla \varphi - \frac{Q}{c} \mathbf{A}}{M} = \frac{\hbar \nabla \varphi - \frac{ke}{c} \mathbf{A}}{km} = \frac{\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A}}{m} \quad (22)$$

Die Gleichungen aus dem vorherigem Kapitel haben daher die Form:

$$\mathbf{j}_e^s = Q N^s \mathbf{v}^s = \frac{en^s}{m} \left(\frac{\hbar}{k} \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + (\mathbf{v}^s \cdot \nabla) \mathbf{v}^s \equiv \frac{d\mathbf{v}^s}{dt} = \frac{e}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v}^s \times \mathbf{B}] \quad (24)$$

Um zu sehen wie das in den Madelung-Gleichungen beschriebene Kondensat, das ja nun auch das eines Supraleiters beschreibt, auf Veränderungen reagiert gibt es zwei Gleichungen, die historisch als erste und zweite London-Gleichungen bekannt sind, wobei die erste den Ladungs- oder Massentransport im Supraleiter/suprafluidem Medium und die zweite die Skintiefe beschreibt. Zunächst soll mit der ersten begonnen werden.

3.2 Erste London-Gleichung

Setzt man den Ladungsstrom $\mathbf{j}_e^s = e\mathbf{j}^s$ nun in die Euler-Gleichung und multipliziert mit en^s erhält man für die Beschleunigung des Stromes

$$\frac{d}{dt} \mathbf{j}_e^s = \frac{e}{m} \left[en^s \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}_e^s}{c} \times \mathbf{B} \right] \quad (25)$$

Der Term $(\mathbf{v}^s \cdot \nabla) \mathbf{v}^s$ enthält die Geschwindigkeit in zweiter Ordnung. Da die erste London-Gleichung allerdings linearisiert ist, verschwindet die Orts-

ableitung. Daraus folgt letztlich als Resultat die sogenannte 1. London-Gleichung, die den dissipationsfreien Stromtransport im Supraleiter beschreibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}^s = \frac{e}{m} \left[en^s \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}_e^s}{c} \times \mathbf{B} \right] \quad (26)$$

Diese Gleichung entspricht dem erwarteten Resultat für einen verlustfreien Stromfluss (vgl. 1.2, Gl. (10))

3.3 Zweite London-Gleichung

Rotiert der Ladungsstrom \mathbf{j}_e^s von Gleichung (XX) verschwindet der Gradient des Phasenfaktors φ , sowie eine magn. Induktion auftritt:

$$\mathbf{j}_e^s = \frac{en^s}{m} \left(\frac{\hbar}{k} \underbrace{\nabla \varphi}_0 - \frac{e}{c} \underbrace{\mathbf{A}}_B \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{j}_e^s = -\frac{e^2 n^s}{mc} \mathbf{B} \quad (27)$$

Dadurch ergibt sich die Londonsche-Abschirmwellenlänge (vgl. 1.3, Gl. (13)) mit:

$$\lambda_0^2 = \frac{mc^2}{4\pi n^s e^2} \quad (28)$$

3.4 Fluxoid-Quantisierung

Eigenschaften des Supra-Stromes

Mit Hilfe der Abschirmwellenlänge wird der Suprastrom nun umgeformt:

$$\mathbf{j}_e^s = \frac{n^s e^2}{mc} \left(-\mathbf{A} + \frac{\hbar c}{ke} \nabla \varphi \right) = \frac{c}{4\pi} \lambda_0^{-2} \left(-\mathbf{A} + \frac{\hbar c}{ke} \nabla \varphi \right)$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi \lambda_0^2}{c} \mathbf{j}_e^s + \mathbf{A} = \frac{\hbar c}{ke} \nabla \varphi \quad (29)$$

Das Fluxoid-Quantum

Die Eindeutigkeit der quantenmechanischen Wellenfunktion erzwingt:

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{r} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) = 2\pi n \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Daraus folgt unter Zuhilfenahme des Stokeschen Integralsatzes:

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{r} \left(\frac{4\pi\lambda_0^2}{c} \mathbf{j}_e^s + \mathbf{A} \right) \stackrel{\text{Stoke}}{=} \int_S dS \left(\underbrace{\frac{4\pi\lambda_0^2}{c} \nabla \times \mathbf{j}_e^s}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}}_{\mathbf{B}} \right) = \Phi_n$$

Die beiden Summanden im Integral sind beides \mathbf{B} -Felder (vgl. Gl. (XX) und (XX)), die über eine Fläche S integriert werden. Dies ist im Allgemeinen als magnetischer Fluss Φ bekannt, der aber in diesem Fall (vgl. Gl. (XX)) gequantelt ist. Ein Fluxoid-Quantum $\Phi_0 = \Phi_n/n$ kann nun berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \frac{c}{ke} \hbar 2\pi n \\ \Phi_0 &= \frac{hc}{ke} \end{aligned} \tag{30}$$

Kürzte sich der Faktor k bis jetzt bei allen anderen Ergebnissen heraus, so tritt er nun an diese Stelle erstmals isoliert auf. Dies war ein möglicher Ansatzpunkt für eine experimentelle Überprüfung der London-Theorie, mit der sie im Doll-Näbauer-Experiment belegt wurde.

3.5 Doll-Näbauer-Versuch

Martin Doll und Robert Näbauer maßen den magnetischen Fluss Φ in Abhängigkeit eines extern angelegten Magnetfeldes $\mathbf{B}_{ext/M?}$ in einem supraleitendem Hohlzylinder aus Blei. Dabei legten sie zunächst im normalleitenden Zustand ein $\mathbf{B}_{ext/M?}$ -Feld an, kühlten den Supraleiter unter T_c ab und schalteten dann das $\mathbf{B}_{ext/M?}$ -Feld wieder ab. Da $\mathbf{B}_{ext/M?} = \dot{\mathbf{A}} = 0$, wobei \mathbf{A} in diesem Fall Kreisfläche des Zylinders beschreibt, blieb Φ konstant, weshalb der Zylinder wie ein Stabmagnet mit Moment μ wurde. Durch Anlegen

eines Wechselfeldes $\mathbf{B}_{ac/e?}$ parallel zu μ begann der Zylinder zu schwingen und die Amplitude konnte mit einem Spiegel gemessen werden, womit letztlich Φ bestimmt wurde. Es zeigte sich eine Quantelung:

$$\Phi_n = \Phi_0 \cdot n; \quad \text{mit } \Phi_0 = \frac{hc}{2e} \quad \text{und } n \in \mathbb{N} \quad (31)$$

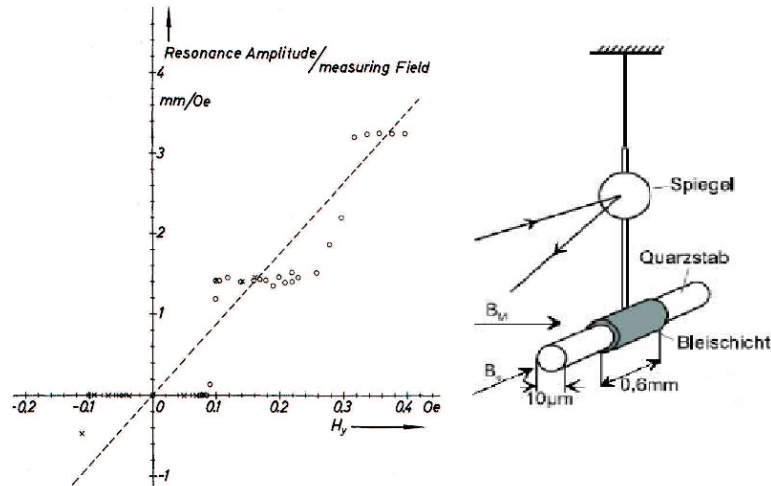


Abb. 3.2: Zum Doll-Näbauer-Versuch

3.6 Neutrale System

Wurde bis jetzt nur geladenen Systemen Beachtung geschenkt, so soll sich dies ab hier ändern. Deswegen eine kurze Zusammenfassung wie die bisherigen Resultate in ungeladenen Systemen ($q = 0$) aussehen.

Geschwindigkeit: Hier fällt das Vektorpotential \mathbf{A} weg, da es immer an eine, hier nicht gegebene, Ladung koppelt.

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{km} \nabla \varphi$$

Stromdichte: Bisher wurde nur der Ladungsstrom \mathbf{j}_q^s untersucht, aber in ungeladenen Systemen ist vielmehr der Massenstrom $\mathbf{j}_m^s = km\mathbf{J}^s$ von Bedeutung, der interessanter weise massenunabhängig ist.

$$\mathbf{j}_m^s = n^s \frac{\hbar}{k} \nabla \varphi$$

Beschleunigung: Hierbei ist zu beachten, dass sich für die Kraft \mathbf{F} das elektrochemische Potential μ im Gradienten befindet, d.h. $q\Phi \rightarrow q\Phi + \mu$, sowie dass der Gradient einer Konstante verschwindet

$$q\mathbf{E} = -q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} \rightarrow -\nabla(q\Phi + \mu_0 + \delta\mu) - \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{F} \stackrel{q \rightarrow 0}{=} -\nabla\delta\mu$$

Damit gilt für:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{\nabla}{m}\delta\mu \quad (32)$$

Erste London-Gleichung Da die Geschwindigkeit nur vom Gradienten des Phasenfaktors abhängt verschwindet in der Identität der Term mit den Kreuzprodukten:

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^s)^2 = (\mathbf{v}^s \cdot \nabla)\mathbf{v}^s + \underbrace{\mathbf{v}^s \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)}_0 = (\mathbf{v}^s \cdot \nabla)\mathbf{v}^s$$

Die zeitliche Änderung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{km}\nabla\dot{\varphi} \quad \text{mit} \quad \frac{\dot{\varphi}}{k} = -\frac{\mu}{\hbar} - \frac{1}{2\hbar}km\mathbf{v}^s$$

wobei μ das Potential der gesamten, ruhenden Flüssigkeit pro Teilchen beschreibt. Es ergibt sich aus der Schrödinger-Gleichung. Als Resultat für $\dot{\varphi}$ wurde die erste Madelung-Gleichung zu Hilfe genommen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}^s &= -\frac{\nabla\mu}{m} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^s)^2 \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}^s + (\mathbf{v}^s \cdot \nabla)\mathbf{v}^s &\equiv \frac{d\mathbf{v}^s}{dt} = -\frac{\nabla}{M}\delta\mu \end{aligned} \quad (33)$$

Die Begründung zur totalen Ableitung ist die Selbe wie in Kapitel X.XX, der Gradient des chemischen Potentials wird wie bei der Beschleunigung behandelt (Gl. (XX)) Anschließend wird in diese Gleichung der Massenstrom $\mathbf{j}_m^s = mn^s\mathbf{v}^s$ für die Geschwindigkeit \mathbf{v}^s eingesetzt und die gesamte Gleichung mit mn^s multipliziert:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}_m^s = -n^s\nabla\delta\mu = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_m^s + (\mathbf{j}_m^s \cdot \nabla)\mathbf{j}_m^s$$

Der Term $(\mathbf{j}_m^s \cdot \nabla)\mathbf{j}_m^s$ enthält den Supra-Massenstrom in zweiter Ordnung. Da die erste London-Gleichung allerdings linearisiert ist, verschwindet diese Ortsableitung. Die erste London-Gleichung für neutrale Systeme lautet daher:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_m^s = -n^s\nabla\delta\mu \quad (34)$$

Zweite London-Gleichung Da der Phasengradient verschwindet gilt für die Rotation des Massenstromes:

$$\nabla \times \mathbf{j}_m^s = 0$$

In neutralen Systemen gibt es weder Abschirmlänge noch Fluxoid-Quantisierung.

3.7 Zusammenfassung

Die London-BCS-Theorie kann bereits viele Phänomene der Supraleitung richtig erklären. Nachteilig ist allerdings, dass sie nicht zwischen Typ 1 und Typ 2 Supraleiter unterscheiden kann. Jedoch ist die superfluide Dichte n^s keine phänomenologische Größe mehr sondern wird über mikroskopische Betrachtung berechenbar, wodurch auch Aussagen über Temperaturabhängigkeiten möglich werden. Experimentell bestätigt wurde die „London-BCS-Theorie“ erstmals 1961.

Hier noch eine Zusammenfassung der Ergebnisse in tabellarischer Form, auch für ungeladene Systeme, sowie mit der verallgemeinerten Ladung q :

Resultate der London-BCS-Theorie

	Geladene Systeme	Neutrale Systeme
Geschwindigkeit	$\mathbf{v}^s = \frac{1}{m} \left(\frac{\hbar}{k} \nabla \varphi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$	$\mathbf{v}^s = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{k} \nabla \varphi$
Stromdichte	$\mathbf{j}_q^s = \frac{qn^s}{m} \left(\frac{\hbar}{k} \nabla \varphi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$	$\mathbf{j}_m^s = n^s \frac{\hbar}{k} \nabla \varphi$
Beschleunigung	$\frac{d\mathbf{v}^s}{dt} = \frac{q}{m} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}^s}{c} \times \mathbf{B} \right]$	$\frac{d\mathbf{v}^s}{dt} = -\frac{1}{m} \nabla \delta \mu$
1. Londongleichung	$\frac{\partial \mathbf{j}_q^s}{\partial t} = \frac{n^s q^2}{m} \mathbf{E}$	$\frac{\partial \mathbf{j}_m^s}{\partial t} = -n^s \nabla \delta \mu$
2. Londongleichung	$\nabla \times \mathbf{j}_q^s = \frac{n^s q^2}{mc} \mathbf{B}$	$\nabla \times \mathbf{j}_q^s = 0$
Abschirmlänge	$\lambda_0^2 = \frac{mc^2}{4\pi n^s q^2}$	—
Fluxoid-Quantum	$\Phi_0 = \frac{hc}{kq}$	—

Literatur

- [1] Schwabl, Franz: *Quantenmechanik 1*, Heidelberg, Berlin 2005
- [2] Einzel, Dietrich: *Lexikon der Physik: Supraleitung und Suprafluidität*, Heidelberg, Berlin 2000; S. 228-235
- [3] Carlton-Gretsch, Louis: *Words in Context*, Stuttgart 2005; S. 56

Danksagung: Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Dr. habil. Dietrich Einzel, der mich häufig Unterstützt hat und ohne den diese Arbeit nie entstanden wäre. Ferner Herrn Dr. Hartmut Wachter, für all die kleineren Stützen und Inspirationen und Herrn Michael Easterbrook vom Klett Verlag für die Informationen zum Copyright.

Anm. d. A.: Im Anschluß habe ich Ihnen meine Herleitungen beigelegt, um zu zeigen, dass ich die Rechnungen auch nachvollzogen habe. Der Anhang ist nicht obligatorisch sondern soll lediglich zum besseren Verständniss der ein oder anderen Textpassage dienen. Zum einfacheren Nachschlagen habe ich die Themen nach Oberkapiteln in der Arbeit geordnet.

A Anhang: Herleitungen

Anm. d. A.: Im Anschluß habe ich Ihnen meine Herleitungen beigelegt, um zu zeigen, dass ich die Rechnungen auch nachvollzogen habe. Der Anhang ist nicht obligatorisch sondern soll lediglich zum besseren Verständniss der ein oder anderen Textpassage dienen. Zum einfacheren Nachschlagen habe ich die Themen nach Oberkapiteln in der Arbeit geordnet.

A.1 Elektrodynamik von Normalmetallen

A.1.1 Die Magnetfeld-Relaxation

Rotation des Ampere-Gesetzes (vgl. Gl. (1)) liefert:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left[\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

Zum Auflösen der rechten Gleichsetzung benötigt man eine Identität aus der Vektoranalysis, zur Rotation des Kreuzproduktes gilt: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$. Wobei in diesem Fall $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ gilt. Deswegen wird aufgrund der Maxwell-Gleichungen der Term für $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ und die Rotation des \mathbf{D} -Feldes wird zu $-\partial \mathbf{B}/(c \partial t)$ Die Gleichung sieht daher wie folgt aus:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla \times \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}$$

Bei Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit von der Form $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$, d.h. $\partial \mathbf{B}/\partial t \rightarrow -i\omega$ kann die Gleichung äquivalent zur Gleichung (XX) im Text geformt werden:

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{B} = -\nabla \times \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e \quad (35)$$

A.2 Madelung-Gleichungen

A.2.1 Madelung-Transformation

Ausgangspunkt ist die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für ein freies Elektron

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \right] \Psi$$

Dazu sei gesagt, dass sich dieses Elektron in Gegenwart der elektrischen Potentiale Φ und \mathbf{A} befindet und selbst die Masse m und Ladung e hat. Mit der Polardarstellung $\Psi \equiv ae^{i\varphi}$ ergibt sich nun:

$$\underbrace{\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right]}_A ae^{i\varphi} = \left[\underbrace{\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}_B + e\phi \right] ae^{i\varphi}$$

Für die **linke Gleichungsseite** ergibt sich:

$$A = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] ae^{i\varphi} = i\hbar \dot{a} e^{i\varphi} + i\hbar a e^{i\varphi} i\dot{\varphi} = [i\hbar \dot{a} - \hbar a \dot{\varphi}] e^{i\varphi}$$

$$A = [i\hbar \dot{a} - \hbar a \dot{\varphi}] e^{i\varphi} \quad (36)$$

Für die **rechte Gleichungsseite** muss zunächst B ausmultipliziert werden:

$$B = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left[\underbrace{-\hbar^2 \nabla^2}_1 + i\hbar \left(\underbrace{\nabla \cdot \frac{e}{c} \mathbf{A}}_2 + \underbrace{\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \nabla}_3 \right) + \underbrace{\frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2}_4 \right]$$

Nun muss jeder Term einzeln ausgewertet werden

Term 1

$$\frac{-\hbar^2 \nabla}{2m} \nabla a e^{i\varphi} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla [\nabla a + ia \nabla \varphi] e^{i\varphi}$$

Bei weiterem Differenzieren darf die Produktregel nicht im 2. Summanden vergessen werden:

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 a + i \nabla a \nabla \varphi + ia \nabla^2 \varphi + i \nabla a \nabla \varphi - a (\nabla \varphi)^2 \right] e^{i\varphi} =$$

$$\frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 a - 2i\hbar^2 \nabla a \nabla \varphi - i\hbar^2 a \nabla^2 \varphi + \hbar^2 a (\nabla \varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \quad (37)$$

Term 2

Setzt sich aus $\nabla \cdot e\mathbf{A}/c$ und $\nabla ae^{i\varphi}$ zusammen, das heißt der Nablaoperator wirkt auf das Vektorfeld \mathbf{A} und die komplexe Funktion Ψ . Wegen der Definition von Term 3 kann Term 2 aber auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{Q}{c} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) ae^{i\varphi} + 2 \cdot \text{Term 3}$$

Nota bene: Die Klammern bedeuten, dass der Operator nur auf das Vektorfeld wirkt

Term 3

$$\frac{i\hbar e}{2mc} \mathbf{A} \cdot \nabla ae^{i\varphi} = \frac{i\hbar e}{2mc} \mathbf{A} \cdot [\nabla a + ia\nabla\varphi] e^{i\varphi} = \frac{1}{2m} \left[i\hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \nabla a - \hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot a\nabla\varphi \right] e^{i\varphi}$$

Gemischter Term

$$\frac{1}{2m} \left[i\hbar \frac{e}{c} a (\nabla \cdot \mathbf{A}) + 2i\hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \nabla a - 2\hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot a\nabla\varphi \right] e^{i\varphi} \quad (38)$$

Term 4

$$\frac{a}{2m} \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 e^{i\varphi} \quad (39)$$

Resultat für B nach Addition der Gleichungen (XX) bis (XX):

$$B = \frac{1}{2m} \left\{ -\hbar^2 \nabla^2 a - 2i\hbar^2 \nabla a \nabla \varphi - i\hbar^2 a \nabla^2 \varphi + \hbar^2 a (\nabla \varphi)^2 + i\hbar \frac{e}{c} a (\nabla \cdot \mathbf{A}) \right. \\ \left. + 2i\hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \nabla a - 2\hbar \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot a\nabla\varphi + a \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right\} e^{i\varphi}$$

Erwin Madelungs Idee war es diese Ergebnisse jeweils nach Real- und Imaginärteil zu trennen. Dazu werden sie zunächst nach diesen sortiert:

$$\{i\hbar\dot{a} - \hbar a\dot{\varphi}\} e^{i\varphi} = \\ \left\{ a \left[\frac{(\hbar\nabla\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi \right] - \frac{\hbar^2 \nabla^2 a}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\hbar\nabla\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) (2\nabla a - a\nabla) \right] \right\} e^{i\varphi}$$

Gleichung für den Realteil ergibt sich aus dem Realteil von A und der rechten Gleichungsseite:

$$-\hbar a \dot{\varphi} e^{i\varphi} = \left\{ a \left[\frac{(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi \right] - \frac{\hbar^2 \nabla^2 a}{2m} \right\} e^{i\varphi}$$

schließlich durch Division mit $-ae^{i\varphi}$:

$$\hbar \dot{\varphi} = -\frac{(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} - e\Phi + \frac{\hbar^2 \nabla^2 a}{2ma} \quad (40)$$

Gleichung für den Imaginärteil ergibt sich entsprechend aus dem Imaginärteil von A und der rechten Gleichungsseite. Unter Verwendung der Umformung $2\nabla a - a\nabla = (\nabla a^2)/a$ folgt:

$$i\hbar \dot{a} e^{i\varphi} = -\frac{i\hbar}{2ma} \nabla \left[a^2 \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] e^{i\varphi}$$

durch Multiplikation mit $(2a)/(i\hbar e^{i\varphi})$

$$\begin{aligned} 2a\dot{a} &= -\nabla \left[\frac{a^2}{m} \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} a^2 &= -\nabla \left[\frac{a^2}{m} \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

A.2.2 Beschleunigung des Kondensats

Die zeitliche Änderung berechnet sich aus $\partial \mathbf{v}_p / \partial t = (\hbar \nabla \dot{\varphi} - (e/c) \dot{\mathbf{A}}) / m$.

Für $\dot{\varphi}$ wird der quasiklassische Limes der ersten Madelung-Gleichung verwendet (vgl. Gl. (XX)). Daraus folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \frac{e}{m} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right) - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}_p^2 \quad (42)$$

Nun benötigt man eine Identität aus der Vektoranalysis, in die die Geschwindigkeit teilweise eingesetzt wird:

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}_p^2 = (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \times \left(\nabla \times \underbrace{\frac{1}{m} \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)}_{\mathbf{v}_p} \right)$$

Durch die Rotation verschwindet der Phasenfaktor φ , sowie das Vektorfeld \mathbf{A} zur Induktion \mathbf{B} (vgl. Gl. XX) wird:

$$\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}_p^2 = (\mathbf{v}_p \cdot \nabla)\mathbf{v}_p - \frac{e}{mc}\mathbf{v}_p \times \mathbf{B} \quad (43)$$

Jetzt kann Gleichung (XX) in Gleichung (XX) eingesetzt werden. Das Resultat ist Gleichung (XX) im Text.

A.3 London-Gleichungen

A.3.1 London-Abschirmwellenlänge

Das Ampere-Maxwell-Gesetz lautet:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_Q^s + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}_{=0}$$

Da im Ladungsträger die Dichte gleich bleibt und die Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (XX)) erfüllt werden muss, ändert sich daher die elektrische Verschiebungsdichte \mathbf{D} zeitlich nicht. Im Supraleiter gilt ferner: $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, da meißt nur eine kleine Magnetisierung \mathbf{M} genügt, um den Supraleiter zu zerstören.

Rotation des Ampere-Gesetzes liefert:

$$\underbrace{\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}}_{\text{Rotation des Kreuzproduktes}} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\nabla \times \mathbf{j}_e^s}_{\text{2. London-Gleichung}}$$

$$\nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{H})}_{=0, \text{vgl. Maxwell}} - \nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \frac{n^s e^2}{m} \mathbf{H}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \frac{n^s e^2}{m} \mathbf{H}$$

Nun muss eine Lösung für diese Gleichung gefunden werden. Sie sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{H}_z(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\mathbf{H}'_z(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\mathbf{H}_z''(x) = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H}_z(x)$$

Daraus kann man nun folgern:

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n^s e^2}} \quad (44)$$